ՀՏԴ 512.1

Գնահատման մեթոդի կիրառությունը եռանկյունաչափությունում

Ռոբերտ Մուսայելյան

DOI: https://di.org/10.58726/27382923-ne2024.1-150

Հանգուցային բառեր. *հավասարում, անհավասարում, համակարգ, գնահատական, օրինակ, ապացույց*

Նախաբան

Հոդվածի թեման դպրոցական դասընթացում հատուկ առանձնացված թեմա չէ, այլ մեթոդների հետ զուգահեռաբար ուշադրության է արժանացվում: Հաշվի առնելով, որ նշված մեթոդով լուծվող վարժությունները սովորաբար լինում են ավելի դժվարավուն, որոշվեց ուշադրություն դարձնել այդ թեմային և դիտարկել տարաբնույթ, համեմատաբար բարդ թվացող վարժություններ, այդ թվում նաև անհավասարությունների ապացույցներ, որոնց լուծման ընթացքում նույնպես կիրառվում է գնահատման մեթոդը: Յուրաքանչյուր օրինակ, ելնելով իրեն հատուկ առանձնահատկությունից, պահանջվում է առանձնակի մոտեցում, որն էլ արվում է աշխատանքում:

Հաճախ գործ ենք ունենում եռանկյունաչափական հավասարումների, հավասարումների համակարգերի և այլ եռանկյունաչափական արտահայտությունների հետ, որոնց լուծման համար կիրառական է, այսպես կոչված, գնահատման մեթոդը: Եթե, օրինակ, պահանջվում է լուծել $f(x) = g(x)$ հավասարումը, որտեղ f-ը և g-ն ֆունկցիաներ են եռանկյունաչափական արտահայտություններից, այնպիսիք, որ կարելի է ուսումնասիրել նրանց $E(f)$ և $E(g)$ արժեքների բազմությունները և ապացուցել, որ այդ բազմությունները կա՛մ չունեն ընդհանուր կետեր, կա՛մ ունեն քիչ թվով ընդհանուր կետեր, ապա այդ դեպքում նշված հավասարումը վեր է ածվում ավելի պարզ $f(x) = a, g(x) = a$ հավասարումների համակարգի, որտեղ, $a \in E(f) \cap E(g)$:

Օրինակ 1: Լուծել հավասարումը.

$$\sin^2 4x + \cos^2 x = 2\sin 4x \cdot \cos^4 x: \qquad (1)$$

Լուծում: Այս հավասարումը, համարժեք ձևափոխություններով, կգրվի հետևյալ կերպ.

$$\sin^2 4x - 2\sin 4x \cdot \cos^4 x + \cos^8 x = \cos^8 x - \cos^2 x,$$

կամ, որ նույնն է,

$$(\sin 4x - \cos^4 x)^2 = -\cos^2 x\,(1 - \cos^6 x): \qquad (1')$$

Այս հավասարության ձախ մասի արժեքների բազմության ստորին եզրը 0 թիվն է (≥ 0), աջ մասինը վերին եզրն է 0 թիվը (≤ 0), որովհետև $\cos^2 x \geq 0$ և $1-\cos^6 x \geq 0$: Ստացվեց, որ (1՛) հավասարությունը տեղի կունենա այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$\begin{cases} (\sin 4x - \cos^4 x)^2 = 0 \\ -\cos^2 x\,(1-\cos^6 x) = 0: \end{cases}$$

Համակարգի 2-րդ հավասարումից կստանանք.

ա) $\cos^2 x = 0$ կամ բ) $1-\cos^6 x = 0$:

ա) դեպքում կունենանք $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in z$:

Համոզվենք, որ x-ի այդ արժեքը բավարարում է նաև համակարգի առաջին հավասարմանը, իրոք.

$$\sin\left(4\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)\right) = \sin(2\pi + 4\pi n) = 0:$$

բ) դեպքում կստանանք՝ $\cos x = \pm 1$: Դժվար չէ հասկանալ, որ այս հավասարման լուծումը $x = \pi k, k \in z$ է: Տեղադրենք արժեքն առաջին հավասարման մեջ.

$$(\sin 4\pi k - \cos^4 \pi k)^{\mathbf{2}} = (0-1)^{\mathbf{2}} \neq 0:$$

Ստացվեց բ) դեպքի լուծումը չի բավարարում առաջին հավասարմանը: Հետևաբար համակարգի, նաև (1) հավասարման լուծումն է.

Պատ.՝ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in z$:

Օրինակ 2: Լուծել հավասարումը.

$$(\cos 2x - \cos 4x)^2 = 4 + \cos^2 3x: \qquad (2)$$

Լուծում: Գնահատենք (2) հավասարության աջ և ձախ մասերը: Պարզ է,

$$|\cos 2x - \cos 4x| \leq 2: \qquad (2՛)$$

Պարզ է նաև, որ (2՛)-ում հավասարության դեպքը հնարավոր է հետևյալ տարբերակներում.

ա) $\cos 2x = 1$ և $\cos 4x = -1$

բ) $\cos 2x = -1$ և $\cos 4x = 1$:

Պարզվում է, որ տարբերակ ա)-ն հնարավոր չէ, որովհետև $\cos 4x = 2cos^2 2x - 1 = -1$ և $2cos^2 2x = 0$, որը հակասություն է այն պարզ պատճառով, որ նույնը և՛ 0, և՛ 1 լինել չի կարող: Ինչ վերաբերում է բ) տարբերակին, ապա այն իրատեսական է, որովհետև $\cos 4x = 2cos^2 2x - 1 = 1$ և ուրեմն $cos^2 2x = 1$ և $\cos 2x = -1$ համակարգը լուծում ունի, այն է՝ $\cos 2x = -1$: Պարզ է, որ այս հավասարման լուծումը $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in z$ է: Ցույց տանք, որ այդ լուծումը բավարարում է նաև $4 + cos^2 3x =$

4 հավասարմանը: Իրոք,

$$4+cos^2\left(3\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)\right)=4+\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}+3\pi k\right)=4+\sin^2 3\pi k=4:$$

Պատ. $x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in z$:

Օրինակ 3: Լուծել հավասարումը.

$$\cos\frac{\sqrt{2}+1}{2}x\cdot\cos\frac{\sqrt{2}-1}{2}x=1: \qquad (3)$$

Լուծում: Օգտագործելով արտադրյալը գումարի ձևափոխող բանաձևը (3)՝ հավասարումը կընդունի հետևյալ համարժեք տեսքը.

$$\cos\sqrt{2}x+\cos x=2: \qquad (3')$$

Քանի որ $\cos x$ ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը հավասար է 1-ի, ուստի (3') հավասարումը համարժեք է

$$\begin{cases}\cos\sqrt{2}x=1\\ \cos x=1\end{cases}$$

համակարգին: Այդ համակարգի հավասարումների լուծումներն են՝ $x=\sqrt{2}\pi n$ և $x=2\pi m$, որտեղ $m,n\in z$: Պարզ է, որ m-ը և n-ը պետք է ընտրել այնպես, որ $x=\sqrt{2}\pi n=2\pi m$: Ստացվեց, որ $n=\sqrt{2}\cdot m$: Քանի որ m և n թվերը ամբողջ են, ուստի այդ հավասարությանը բավարարողներ են միայն $m=n=0$: Այսպիսով՝ (3) հավասարման լուծումը կլինի $x=0$:

Պատ. $x=0$:

Օրինակ 4. Լուծել հավասարումը:

$$\sin^4 x+\cos^4 x=tg^2\frac{3}{4}x+2tg\frac{3}{4}x+2: \qquad (4)$$

Լուծում: Գնահատենք (4) հավասարության աջ և ձախ մասերը: Աջ մասի համար կստանանք՝

$$tg^2\frac{3}{4}x+2tg\frac{3}{4}x+2=1+\left(tg\frac{3}{4}x+1\right)^2\geq 1:$$

Պարզ է, որ $\sin^4 x\leq\sin^2 x$ և $\cos^4 x\leq\cos^2 x$: Ուրեմն ձախ մասի համար կստանանք.

$$\sin^4 x+\cos^4 x\leq\sin^2 x+\cos^2 x=1:$$

Այս երկու գնահատականները մեզ հնարավորություն են ընձեռում (4) հավասարումը փոխարինել իրեն համարժեք հետևյալ համակարգով՝

$$\begin{cases}\sin^4 x+\cos^4 x=1\\ 1+\left(tg\frac{3}{4}x+1\right)^2=1:\end{cases}$$

Համակարգի երկրորդ հավասարումից կունենանք՝

$tg\frac{3}{4}x=-1$, որտեղից $x=-\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi k}{3}, k\in z$:

Այս լուծման մեջ k-ն ընտրենք այնպես, որ լուծումը բավարարի նաև համակարգի առաջին հավասարմանը: Դրա համար նախապես պարզեցնենք այդ հավասարումը:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1$$

որտեղից՝ $\sin^2 2x = 0$: Դիտարկենք երեք հնարավոր դեպքեր.

ա) $k = 3m$, բ) $k = 3m + 1$, գ) $k = 3m + 2$:

ա) երբ $k = 3m$, ապա $x = -\frac{\pi}{3} + 4\pi m$

$$\sin 2\left(-\frac{\pi}{3} + 4\pi m\right) = -\sin\frac{2\pi}{3} \neq 0:$$

Հետևաբար՝ ա) դեպքում լուծումը չի բավարարում համակարգի առաջին հավասարմանը:

բ) $k = 3m + 1$, ապա $x = -\frac{\pi}{3} + 4\pi m + \frac{4\pi}{3} = \pi + 4\pi m$:

$$\sin 2(\pi + 4\pi m) = 0:$$

Այս դեպքում լուծումը բավարարեց նաև առաջին հավասարմանը:

գ) $k = 3m + 2$, ապա $x = -\frac{\pi}{3} + 4\pi m + \frac{8\pi}{3} = \frac{7}{8}\pi + 4\pi m$:

$$\sin 2\left(\frac{7}{8}\pi + 4\pi m\right) = -\sin\frac{3}{4}\pi \neq 0:$$

Այս դեպքում նույնպես լուծումը չբավարարեց համակարգի առաջին հավասարմանը: Այսպիսով՝ (4) հավասարման լուծման պատասխանը կլինի՝ $x = \pi + 4\pi m, m \in z$:

Օրինակ 5: Լուծել հավասարումը.

$$\frac{3 + 2\cos(x-y)}{2} = \sqrt{3 + 2x - x^2} \cdot \cos^2\frac{x-y}{2} + \frac{\sin^2(x-y)}{2}: \qquad (5)$$

Լուծում: Նախ նկատենք, որ այս հավասարումը բաղկացած է երկու անհայտից: Լուծելու համար պետք է կատարել այնպիսի հարմար գնահատումներ, որոնք հնարավորություն կտեղծեն տարանջատելու անհայտները: Կատարելով նույնական ձևափոխություններ, կիրառելով նաև եռանկյունաչափական նույնություններ՝ (5) հավասարումը կգրվի այսպես՝

$$\cos^2(x-y) + \left(2 - \sqrt{4 - (x-1)^2}\right)\cos(x-y) + 2 - \sqrt{4 - (x-1)^2} = 0: \quad (5')$$

Այժմ կատարենք $\lambda = \cos(x-y)$ և $\sigma = 2 - \sqrt{4 - (x-1)^2}$ նշանակումներ, որից հետո (5′) հավասարումը կարելի կլինի գրանցել հետևյալ կերպ՝

$$\lambda^2 + \sigma \cdot \lambda + \sigma = 0:$$

Մեր նպատակն է լուծել (5) հավասարումը: Ուրեմն պետք է պահանջել, որ λ-ի նկատմամբ այդ քառակուսային հավասարումը ունենա լուծում: Ստացվեց, որ նրա տարբերիչը՝ $\sigma^2 - 4\sigma \geq 0$: Այդ անհավասարման լուծումն է՝

$$\sigma \in (-\infty; 0] \cup [4; \infty): \qquad (5'')$$

Բայց համաձայն նշանակման՝ $0 \le \sqrt{4-(x-1)^2} \le 2$: Դժվար չէ հասկանալ, որ այս դեպքում $\sigma \in [0; 2]$:

Ստացվում է, որ σ-ն պետք է պատկանի և՛ վերջին, և՛ $(5'')$ բազմություններին: Ուրեմն $\sigma = 2 - \sqrt{4-(x-1)^2} = 0$, կամ որ նույնն է՝ $x = 1$: Այս դեպքում $(5')$ հավասարումը կընդունի $\cos^2(y-1) = 0$ տեսքը, որտեղից՝

$$y = 1 + \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in z:$$

Պատ.՝ $(x, y) = \left(1; 1 + \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in z$:

Օրինակ 6. Լուծել հավասարումը.

$$\sqrt{2-|y|}\left(5\sin^2 x - 6\sin x\cos x - 9\cos^2 x + 3\sqrt[3]{38}\right) =$$
$$= arc\sin^2 x + atc\cos^2 x - \frac{5}{4}\pi^2: \qquad (6)$$

Լուծում: Գնահատենք (6) հավասարության աջ և ձախ մասերը: Ցույց տանք, որ ձախ մասի ստորին սահմանը 0 թիվն է, իսկ աջ մասի վերին սահմանը նույնպես 0 թիվն է: Նախ, նշենք, որ $\sqrt{2-|y|} \ge 0$: Ձևափոխենք ձախ մասի փակագծում գրված արտահայտությունը՝ բերելով այն գնահատման համար հարմար տեսքի.

$$5\sin^2 x - 6\sin x\cos x - 9\cos^2 x + 3\sqrt[3]{38} =$$
$$= 6\sin^2 x - (\sin^2 x + 6\sin x\cos x + 9\cos^2 x) + 3\sqrt[3]{38} =$$
$$= 6\sin^2 x - (\sin x + 3\cos x)^2 + 3\sqrt[3]{38} =$$
$$= 6\sin^2 x + 3\sqrt[3]{38} - 10\sin^2(x+\varphi), \qquad (6')$$

որտեղ՝ $\varphi = arc\sin\frac{3}{\sqrt{10}}$: Քանի որ $3\sqrt[3]{38} > 10$, ուստի պարզ է, որ $(6')$ արտահայտությունը դրական է: Ստացվեց, որ (6) հավասարության ձախ մասը ոչ բացասական է, ընդ որում՝ զրո դառնում է, երբ $\sqrt{2-|y|} = 0$, այսինքն՝ $y = \pm 2$:

Աջ մասը գնահատելու համար օգտվենք հայտնի նույնությունից՝

$$arc\sin x + arc\cos x = \frac{\pi}{2}:$$

Կատարենք $t = arc\sin x$ նշանակում: Այդ դեպքում (6) հավասարության աջ մասը կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$t^2 + \left(\frac{\pi}{2} - t\right)^2 - \frac{5}{4}\pi^2 = 2t^2 - \pi t - \pi^2,$$

որտեղ՝ $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$: Այս քառակուսային ֆունկցիայի մինիմումի կետը

$$t = \frac{\pi}{4}$$

-ն է, իսկ մաքսիմումինը՝ $t = -\frac{\pi}{2}$ կետը, և այդ կետում քառակուսային եռանդամը դառնում է զրո: Այսպիսով՝ (6) հավասարության աջ մասի մեծագույն արժեքը զրոն է, և այն ընդունում է

$$arc\sin x = -\frac{\pi}{2}$$

կետում, որտեղից $x = -1$: Հետևաբար դիտարկված (6) հավասարումն ունի երկու լուծում՝ $(x, y) = (-1; -2)$ և $(x, y) = (-1; 2)$:

Օրինակ 7: Լուծել հավասարումների համակարգը:

$$\begin{cases} \sqrt{\sin x}\cos y = 0 \\ 2\sin^2 x - \cos 2y - 2 = 0: \end{cases} \qquad (7)$$

Լուծում: Նախ նկատենք, որ $\sin x \geq 0$: Երբ $\sin x = 0, x = \pi k, k \in z$, ապա համակարգի առաջին հավասարումը դառնում է նույնություն, իսկ երկրորդ հավասարումը այդ դեպքում լուծում չի ունենա, որովհետև $\cos 2y + 2 \neq 0$: Մյուս կողմից, եթե $\sin x > 0$, ապա (7) համակարգը կգրվի այսպես.

$$\begin{cases} \sin x > 0, \\ \cos y = 0 \\ 2\sin^2 x - \cos 2y - 2 = 0: \end{cases} \qquad (7')$$

Հայտնի է, որ $\cos 2y = 2\cos^2 y - 1$: Հաշվի առնելով (7՛) համակարգի տվյալները և նոր գրված նույնությունը՝ համակարգը կգրվի հետևյալ կերպ.

$$\begin{cases} \cos y = 0 \\ \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}: \end{cases}$$

Լուծումը կլինի՝ $y = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in z$ և $x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in z$:

Պատ.՝ $(x, y) = \left((-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi k\right), n, k \in z$:

Օրինակ 8: a-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում համակարգը ունի լուծում: Գտնել լուծումները:

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos 2y = (a^2 - 1)^2 + 1 \\ \cos x \cdot \sin 2y = a + 1: \end{cases} \qquad (8)$$

Լուծում: Քանի որ համակարգի ձախ մասերը չպետք է գերազանցեն 1 թիվը, ուստի համակարգը լուծում կունենա միայն այնպիսի a-ների դեպքում, որոնք կբավարարեն.

$$\begin{cases} (a^2 - 1)^2 + 1 \leq 1 \\ |a + 1| \leq 1 \end{cases}$$

համակարգին: Այս համակարգի առաջին անհավասարման լուծումը կլինի $a = \pm 1$: Այս լուծումներից պարզ է, որ միայն $a = -1$ է բավարարում երկրորդ անհավասարմանը: Այսպիսով՝ ստացվեց, որ (8) համակարգը լուծում կունենա միայն երբ $a = -1$: Այդպիսի a-ի համար կլինի՝

$$\begin{cases}\sin x \cdot \cos 2y = 1 \\ \cos x \cdot \sin 2y = 0:\end{cases} \qquad (8')$$

Այժմ լուծենք (8՛) համակարգը: Անդամ առ անդամ գումարելով և հանելով այդ համակարգի հավասարումները՝ կստանանք նրան համարժեք

$$\begin{cases}\sin(x+2y) = 1 \\ \sin(x-2y) = 1\end{cases}$$

համակարգը: Դրա լուծումներն են՝

$$\begin{cases}(x+2y) = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in z \\ (x-2y) = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in z:\end{cases}$$

Ակնհայտ է, որ վերջին համակարգի լուծումներն են՝

$$x = \frac{\pi}{2} + (k+m)\pi, y = \frac{(k-m)\pi}{2}:$$

Պատ.՝ (8) համակարգի լուծումը $a = -1$ դեպքում

$$(x, y) = \left(\frac{\pi}{2} + (k+m)\pi; \frac{\pi}{2} + (k-m)\right)k, m \in z:$$

Այժմ ներկայացնենք մի քանի անհավասարությունների ապացույցներ՝ նշելով նախապես, որ նրանք հենվում են հետևյալ պարզագույն անհավասարության վրա. ցանկացած $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ համար ճիշտ է

$$\sin t < t < tgt: \qquad (9)$$

Այս (9) անհավասարության ապացույցը ընթերցողը կարող է գտնել մասնագիտական գրականության մեջ, մասնավորապես՝ [1]-ի հավելված 3-ում:

Օրինակ 9: Ապացուցել, որ

$$\sin 1 > \frac{\pi}{4}: \qquad (10)$$

Ապացույց: Նախ նշենք, որ 1 թիվը ռադիան է, այլ ոչ թե աստիճան: Օգտվելով հայտնի բերման բանաձևերից՝ կստանանք՝

$$\sin 1 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 1\right):$$

Այժմ անդրադառնալով կրկնակի անկյան բանաձևին՝ վերջինս կգրենք հետևյալ կերպ՝

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right): \qquad (10')$$

Հիմա օգտվենք (9) բանաձևից, համաձայն որի՝ ակնհայտ է, որ $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) < \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$: Հետևաբար (10՛) բանաձևից կստանանք հետևյալ գնահատականը՝

$$1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)>1-2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)^2:$$

Պահանջվող (10) անհավասարությունն ապացուցելու համար բավական է ցույց տալ, որ

$$1-2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)^2>\frac{\pi}{4}:$$

Այս անհավասարությունից կստանանք՝

$$\pi^2-2\pi-4<0:$$

Այժմ եթե այս անհավասարությունը դիտենք որպես անհայտ պարունակող (π-ն մտովի փոխարինենք x-ով), ապա կստանանք՝

$$1-\sqrt{5}<\pi<\sqrt{5}+1:$$

Քանի որ $\sqrt{5}>2{,}2$ և $\pi<3{,}2$, ապա կստացվի

$$1-\sqrt{5}<0<\pi<3{,}2<1+\sqrt{5}:$$

Հետևաբար դիտարկվող (10) անհավասարությունը ճշմարտացի է:

Օրինակ 10: Ապացուցել, որ երբ $0<t<\frac{\pi}{2}$, ապա

$$t-\frac{t^3}{4}<\sin t: \qquad (11)$$

Ապացույց: Օգտվենք (9) անհավասարությունից, որից էլ կստանանք՝

$$\frac{t}{2}<tg\frac{t}{2}: \qquad (11')$$

Հաշվի առնելով, որ որոշման տիրույթում $\cos^2\frac{t}{2}>0$՝ (11') անհավասարությունը, կստանանք՝

$$t\cdot\cos^2\frac{t}{2}<2\sin\frac{t}{2}\cdot\cos\frac{t}{2}=\sin t:$$

Եվս մեկ անգամ անդրադառնալով (9) անհավասարությանը, որի համաձայն՝ $\sin\frac{t}{2}<\frac{t}{2}$ և կիրառելով եռանկյունաչափական նույնություն՝ վերջինից կստանանք՝

$$t\left(1-\sin^2\frac{t}{2}\right)<t\left(1-\frac{t^2}{4}\right)<\sin t,$$

այսինքն՝ $t-\frac{t^3}{4}<\sin t$:

Եզրակացություն

Աշխատանքում բերված են օրինակներ, որոնցում նախքան գնահատելը պետք է նույնական ձևափոխություններով դիտարկվող օրինակը բերել գնահատման համար հարմար դեպքի, նոր միայն գնահատման միջոցով դիտարկվող օրինակը տրոհվում է ավելի պարզ, նախնականին համարժեք վարժության լուծման:

Դիտարկված են նաև երկու անհայտով մեկ հավասարումներ, որոնք բավական հաջողված մոտեցումներով, նշված մեթոդի կիրառությամբ լուծվում են: Դիտարկված են նաև համակարգեր, այդ թվում նաև պարամետր պարունակող: Եվ, վերջապես, վերջին 2 օրինակները անհավասարությունների ապացույցներ են՝ նույն մեթոդի կիրառություններով:

Աշխատանքն ունի մեթոդական, ուսուցողական նշանակություն, և այն առանձնապես օգտակար է բարձր դասարանցիների համար, ինչու չէ, նաև ուսուցիչների համար:

DOI: https://di.org/10.58726/27382923-ne2024.1-150

Գրականություն

1. Առաքելյան Կ. Գ., Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրերը, օժանդակ ձեռնարկ ավագ դպրոցի մաթեմատիկայի խորացված ուսուցմամբ դասարանների համար, Երևան, «Զանգակ-97» հրատ., 2001, 358 էջ:
2. Եգորև Վ. Կ. և ուրիշներ, Մաթեմատիկայի մրցույթային խնդիրների ժողովածու, ԲՏՈՒՀ ընդունվողների համար, Մ. Ի. Սկանավիի խմբագրությամբ, Երևան, «Լույս», 1990, 543 էջ:

Применение метода оценки в тригонометрии

Роберт Мусаелян

Резюме

Ключевие слова: *уравнение, неравенство, система, оценка, пример, доказательство*

Работа посвящена решениям тригонометрических уравнений, тригонометрических систем, доказательствам тригонометрических выражений для которых применяется известный, так называемый метод оценки. Коротко представим этот метод. Если, например, требуется решить уравнение $f(x) = g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ - функции от тригонометрических выражений, таких, что можно исследовать их области значения $E(f)$ и $E(g)$ и доказать, что эти множества либо не имеют общую точку, либо имеют общую точку. В этом случае, когда уравнение имеет решение, то оно распадает эквивалентной системе $f(x) = a$ и $g(x) = a$, которая сравнительно легко решается.

В работе приводятся уравнения, системы уравнений, решения которых с первого взгляда кажется трудным, однако после эквивалентных преобразований решается указанным методом. В работе приведенных из 10-и примеров последние 2 - доказательства неравенств, где тоже применяется указанный метод.

Рассмотренные примеры, применения метода решения, имеют методическое и приучительное значение, особенно, для старшеклассников.

The Application of the Assessment Method in Trigonometry

Robert Musayelyan

Summary

Key words: *equation, inequality, system, extimate, example, demonstration*

This work is devoted to the solutions of trigonometric equations and systems, proofs of trigonometric expressions for which the so-called famous evaluation method is used. Let's briefly introduce this method. If, for example, you need to solve the equation $f(x) = g(x)$, where $f(x)$ and $g(x)$ are functions of trigonometric expressions, such that you can explore their range of values of $E(f)$ and $E(g)$ prove that these sets either do not have a common point or have a common point. In this case, when the equation has a solution, it decays to the equivalent system $f(x) = a$ и $g(x) = a$, which is relatively easy to solve.

The work presents equations, systems of equations, the solution of which at first glance seems difficult, but after equivalent transformations it is solved using the specified method. In the work given from 10 examples, the last 2 are the proofs of inequalities, where the specified method is also used. The examples and the applications of the methods of solutions have a methodological, instructive value, especially for high school students.

Ներկայացվել է 09.01.2024 թ.
Գրախոսվել է 29.01.2024 թ.
Ընդունվել է տպագրության 30.05.2024 թ.